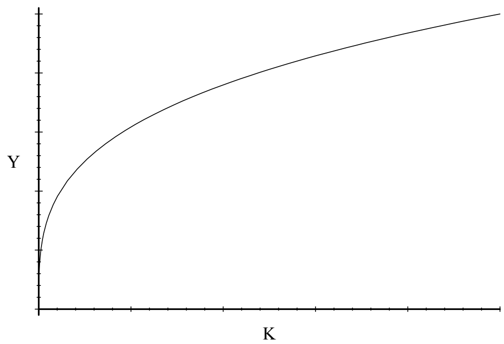
## 2 Ekonomisk tillväxt

Vi har tidigare studerat produktionsfuntionen $Y = F(K, L)$ och noterat att Cobb-Douglas' specifikation

$$F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \tag{24}$$

stämmer bra med data om vi sätter kapitalandelsparametern $\alpha$ till 0.3. Låt oss nu studera tillväxt genom kapital ackumulation. Genom att plotta $F(K, L)$ mot $K$ ser vi att det blir allt svårare att öka produktionen genom att öka kapitalmängden om $L$ hålls konstant – kapitalets marginalprodukt, given av $\alpha(K/L)^{\alpha-1}$, faller i kapital/arbetskraftskvoten eftersom $\alpha < 1$.




### 2.1 Solow modellen och "growth accounting"

**Notation**

Om en variabel $X$ växer med takten $n$ menar vi att

$$\frac{dX}{dt} = nX, \tag{25}$$

d.v.s. om enheten för $n$ är procent per år är tillväxten $n$ procent av $X$ per år. En annan vanlig notation är

$$\frac{\dot{X}}{X} = n \tag{26}$$

Exempel, $n$ är räntan på en banktillgång. Om räntan återinvesteras växer tillgångarna med takten $n$ procent per år. Följande formel är praktisk

$$\frac{d\ln(X)}{dt} = \frac{1}{X}\dot{X} = \frac{\dot{X}}{X}, \tag{27}$$

d.v.s. förändringen i logaritmen av $x$ per tidsenhet är lika med *förändringstakten* i $X$ (t.e.x i procent).

Exempel:

I år växer real BNP med cirka 2% från cirka 2000 miljarder kronor. Det betyder att

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= 40 \text{ miljarder SEK} \\ \frac{\dot{Y}}{Y} &= \frac{40}{2000} = 2\% \\ &\approx \ln 2040 - \ln 2000 \approx 1.98\% \end{aligned} \tag{28}$$

Beräkningen blir inte exakt eftersom vi inte tar hänsyn till ränta-på-ränta effekter. Om vi låter mätintervallet krympa blir beräkningen mer exakt, t.ex. om vi tittar över en dag, så växer BNP med 40/365 = 0. 10959 miljarder och vi får

$$\frac{d\ln(Y)}{dt} \approx \frac{(\ln 2000.10959 - \ln 2000)}{1/365} = 1.9999\% \tag{29}$$

### 2.1.1 Growth accounting

Vid tidpunkten $t$ produceras $Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$ och vi är nu intresserade av hur tillväxttakten i $Y$ beror på tillväxttakterna i $K$ och $L$. Vi kan nu använda vår formel. Först logaritmerar vi produktionsfunktionen

$$\ln Y_t = \alpha \ln K_t + (1-\alpha)\ln L_t \tag{30}$$

Sedan har vi

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{d\ln(Y_t)}{dt} = \alpha \frac{d\ln(K_t)}{dt} + (1-\alpha)\frac{d\ln(L_t)}{dt}, \tag{31}$$

d.v.s. tillväxttakten (t.ex. i procent per år) är lika med $\alpha$ gånger tillväxttakten i kapitalstocken plus $(1-\alpha)$ gånger tillväxttakten i antalet arbetare. Denna ekvation används för så kallad "growth accounting". Låt oss nu använda faktisk BNP, vi kan då skriva

$$\frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha\frac{\dot{K}}{K} - (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L} = \text{Solow residual.} \tag{32}$$

Enligt vår enkla modell skulle Solow residualen vara noll, men bland annat eftersom vi exkluderat teknisk utveckling från modellen är den i verkligheten förstås inte noll. Under efterkrigstiden har tillväxttakten i USAs BNP varit i storleksordningen 3%. Värdet på $\alpha$ har varit cirka 0.3, $\frac{\dot{K}}{K}$ ungefär 3% per år och $\frac{\dot{L}}{L}$ knappt 2% per år. Tillväxt i kapital och arbetskraft har därmed svarat för vardera cirka 1% tillväxt per år och Solowresidualen för också 1%. Under "tillväxtundren" i de asiatiska tigrarna (Singapore, Korea och Taiwan) svarade kapitalackumulkering för en betydligt större andel.

Vi kan också lätt räkna ut hur output per arbetare, dvs $y \equiv Y/L$, växer.

$$\begin{aligned}\frac{\dot{y}}{y} &= \frac{d}{dt}\ln(y) = \frac{d}{dt}\ln(Y/L) \\ &= \frac{d}{dt}(\ln Y - \ln L) \\ &= \frac{d}{dt}\ln Y - \frac{d}{dt}\ln L \\ &= \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L}\end{aligned} \tag{33}$$

## 2.2 Solowmodellen

Antag nu att

1. individerna sparar en konstant andel $s$ av output för investeringar och att
2. kapitalstocken deprecierar med takten $\delta$.

Antag att den produktionsfunktionen är CRS och låt oss specificera den till Cobb-Douglas. Vi kan då uttrycka output per arbetare som

$$\frac{Y}{L} \equiv y = \frac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \equiv k^{\alpha}, \tag{34}$$

där små bokstäver innebär att variabeln uttrycks per arbetare. Notera att

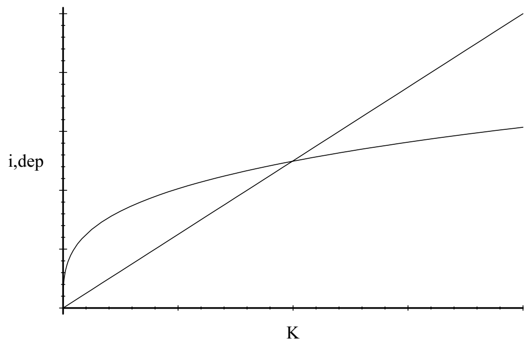
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dk} &= \alpha k^{\alpha-1} = \alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}, \\ \frac{dY}{dK} &= \alpha\left(K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}\right) = \alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1},\end{aligned} \tag{35}$$

dvs $\frac{dy}{dk}$ = kapitalets marginalprodukt.

Vi noterar också att

$$\begin{aligned}\dot{K}_t &= sY_t - \delta K_t \\ &= sK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha} - \delta K_t.\end{aligned} \tag{36}$$

Vi kan plotta de två komponenterna i högerledet. Notera att den första är bruttoinvesteringarna och den senare deprecieringen. Det är lätt visa att om $K$ är postiv men nära noll så är $sK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha} - \delta K_t > 0$, dvs bruttoinvesteringarna är större än deprecieringen och kapitalstocken växer.[2] Likaså, eftersom produktionsfunktionen är konkav, så om $K$ är tillräckligt stor, så gäller motsatsen. Det finns alltså en balanspunkt som ekonomin automatiskt rör sig mot där bruttoinveseteringarna är lika med deprecieringen så att kapitalstocken är konstant.




Vi kan nu finna denna balanspunkt, ett så kallat "steady state", genom att sätta $\dot{K} = 0$ i 36.

$$
\begin{aligned}
0 &= sK^{\alpha}L^{1-\alpha} - \delta K, \qquad (37)\\
sK^{\alpha}L^{1-\alpha} &= \delta K\\
\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha} &= \frac{s}{\delta}\\
k^* &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\\
y^* = (k^*)^{\alpha} &= \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

Som vi ser så så produktion per arbetare en ökande funktion av kvoten mellan $s$ och $\delta$.

## 2.3 Befolkningstillväxt

Antag nog också att befolkningen växer med takten $n$. Vi vet redan att

$$
\begin{aligned}
\dot{y}/y &= \dot{Y}/Y - \dot{L}/L \qquad (38)\\
&= \dot{Y}/Y - n
\end{aligned}
$$

[2]Båda kurvorna startar på 0, men lutningen på den första, som ges av

$$\frac{d\left(sK^{\alpha}L^{1-\alpha}\right)}{dK} = \frac{sK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K}$$

går mot oändligheten när $K$ går mot 0.

och att

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \alpha \frac{\dot{K}_t}{K_t} + (1 - \alpha) \frac{\dot{L}_t}{L_t}. \tag{39}$$

För att beräkna $\frac{\dot{K}_t}{K_t}$ så använder vi (36),

$$\begin{aligned} \dot{K}_t &= sY_t - \delta K_t, \\ &= sK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - \delta K_t, \\ \frac{\dot{K}_t}{K_t} &= s\frac{K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{K_t} - \delta, \\ &= sk^{a-1} - \delta. \end{aligned} \tag{40}$$

Vi kan nu summera våra beräkningar

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} &= \alpha \left( sk^{a-1} - \delta \right) + (1 - \alpha) n \\ &= \alpha \left( sk^{a-1} - (\delta + n) \right) + n \\ \dot{y}/y &= \alpha \left( sk^{a-1} - (\delta + n) \right). \end{aligned} \tag{41}$$

Också här ser vi att det finns en balanspunkt (*steady state*) för $k$, sådan att $sk^{a-1} - (\delta + n)$, där $\dot{y}/y = 0$. I denna punkt är tillväxten i BNP lika med $n$ och tillväxten i BNP per capita lika med 0. Den ges av $k$ sådant att

$$k^* = \left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{42}$$

som ger BNP per capita

$$y^* = \left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{43}$$

BNP per capita i steady state ökar i $s$ och minskar i $\delta$ och $n$.

Men, hur är det med konsumtionen per arbetare i *steady state*, d.v.s. $(1 - s) y$? Uppenbarligen är den noll både för $s = 0$ och $s = 1$ och måste maximeras för något därimellan. Vi kan hitta detta maximum på följande sätt. I *steady state* är

$$\begin{aligned} sk^{a-1} &= (\delta + n) \\ sk^{a} &= (\delta + n) k, \\ sy &= (\delta + n) k \end{aligned} \tag{44}$$

Konsumtionen per capita i *steady state,* dvs $y^* - sy^*$ can därför skrivas

$$c^* = y^* - (\delta + n) k^*. \tag{45}$$

Om vi maximerar detta (genom att välja $s$) så får vi ett första ordningens villkor

$$0 = \frac{dy}{dk} - (\delta + n) \,. \tag{46}$$

Detta är den så kallade *gyllene regeln.* Om vi kommer ihåg (35) så noterar vi att den säger att kapitalets marginalprodukt ska i steady state vara lika med depreciering plus befolkningstillväxt. Genom att använda uttrycket för *steady state* i den gyllene regeln kan vi uttryck för den sparkvot som maximerar konsumtionen per capita i *steady state*,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dk} &= \alpha k^{\alpha-1} = (\delta + n) \\ \alpha \left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} &= (\delta + n) \\ s^{gr} &= \alpha. \end{aligned} \tag{47}$$

Ramsey argumenterade att detta är den moraliskt optimala sparandenivån. Hans argumentation byggde på att man inte ska diskontera framtida generationer, dvs alla generationers nytta är lika viktig och det moraliskt rättfärdiga är därför att maximera steady state nyttan. I vart fall kan den inte vara optimalt att spara mer än vad som ges av golden rule. Antag att man ändå gör det, dvs av någon anledning är $s > s^{kr}$ och anta att ekonomin har nått steady state. Då är kapitalstocken per arbetare

$$\begin{aligned} k^* &= \left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &> \left( \frac{s^{gr}}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^{gr}. \end{aligned} \tag{48}$$

Vad händer nu om vi minskar sparandet ned till $s^{kr}$? För det första vet vi att i steady state kommer konsumtionen per arbetare att vara högre än om vi inte gör förändringen. Under övergångstiden är konsumtion ännu högre. Det betyder att genom att minska sparandet kan man konsumera mer i alla framtida tidsperioder.

Om man istället startar med en sparkvot $s < s^{kr}$. Iså fall kan man öka konsumtionen i steady state. Men, detta sker till priset av minskad konsumtion under en övergångsperiod. Om detta är bra eller dåligt beror på hur man värderar konsumtion vid olika tidpunkter.

## 2.4 Teknisk tillväxt

Som redan noterats kommer i verkligheten förstås tillväxt inte bara från ackumulering av fysiskt kapital och arbete, utan också från teknisk tillväxt. Vi kan inkludera det i Solow modellen genom att anta att arbetskraftens *effektivitet* växer, t.ex., på grund av att den blir bättre utbildad. Låt oss kalla effektivitetsnivån på arbetskraften $E$, anta att den växer med takten $g$ och att produktionsfunktion är

$$Y_t = K_t^{\alpha} \left(L_t E_t\right)^{1-\alpha}. \tag{49}$$

Notera att nu mängden *effektiv* arbetskraft ($LE$) växer med takten $n+g$. Det betyder att BNP växer enligt

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \alpha \frac{\dot{K}_t}{K_t} + (1-\alpha)(n+g). \tag{50}$$

Som tidigare har vi $\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t$, vilket ger

$$\begin{aligned} \frac{\dot{K}_t}{K_t} &= s \frac{K_t^{\alpha}\left(L_t E_t\right)^{1-\alpha}}{K_t} - \delta \\ &= s \left(\frac{K_t}{L_t E}\right)^{\alpha-1} - \delta, \end{aligned} \tag{51}$$

som betyder att

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} &= \alpha \left( s \left(\frac{K_t}{L_t E_t}\right)^{\alpha-1} - \delta \right) + (1-\alpha)(n+g), \\ &= \alpha \left( s \left(\frac{K_t}{L_t E_t}\right)^{\alpha-1} - (\delta+g+n) \right) + n + g, \\ \dot{y}/y &= \alpha \left( s \left(\frac{K_t}{L_t E_t}\right)^{\alpha-1} - (\delta+g+n) \right) + g. \end{aligned} \tag{52}$$

Liksom i det tidigare faller med konstant $E$ finns en tillväxt bana där tillväxttakten är konstant. Längs en sådan bana måste kvoten $\frac{K_t}{L_t E_t}$ vara konstant. Det betyder att vi måste ha

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t} = n + g. \tag{53}$$

Genom att använda (51) så ser vi att

$$\begin{aligned} n + g &= s \left(\frac{K_t}{L_t E_t}\right)^{\alpha-1} - \delta, \\ \rightarrow \frac{K_t}{L_t E_t} &= \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\equiv \tilde{k}^* \end{aligned} \tag{54}$$

Vi ser också från (51) att $\frac{\dot{K}_t}{K_t}$ minskar när $\frac{K_t}{L_t E_t}$ ökar. Det betyder att om $\frac{K_t}{L_t E_t}$ är mindre (större) än $\tilde{k}^*$ så växer $K_t$ med en högre (lägre) takt än $L_t E_t$. Det betyder att $\frac{K_t}{L_t E_t}$ växer (sjunker) om det är under (över) $\tilde{k}^*$. På sikt nås alltså automatiskt en balanspunkt där $s\left(\frac{K_t}{L_t E_t}\right)^{\alpha-1} = (\delta + g + n)$ och BNP växer med en takt $n + g$ och BNP per kapita med $g$.

### 2.4.1 Konvergens

Vår model säger att på sikt är tillväxttakten i procent per kapita given av den tekniska tillväxten $g$. Låt oss nu studera 4 länder som startar med olika nivå på NBNP per capita, vilket vi antar beror på att de har olika kapitalstock i förhållande till mängden effektiv arbetskraft. Land $A$ och $B$ har högre sparkvot, kallad $s_h$ än land $C$ och $D$ som har en sparkvot given av $s_l$. Land $A$ startar med ett värde på $\frac{K_t}{L_t E_t}$ som är högre än $\left(\frac{s_h}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Land $B$ och $C$ har samma värde på $\frac{K_t}{L_t E_t}$, men detta värde är under $\left(\frac{s_h}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ men över $\left(\frac{s_l}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Land $D$, slutligen, har ett värde på $\frac{K_t}{L_t E_t}$ som är under $\left(\frac{s_l}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Antag att den tekniska nivån $E_t$ är den samma för att länder. Ländernas BNP per capita kommer enligt modellen att utvecklas som visas i bilden. Dvs, de kommer att *konvergera* till tillväxtbanor vars lutning är oberoende av $s$ men vars nivå ökar i $s$.

Modellens prediktion, att det finns en upphinnar faktor som gör att länder med låg BNP växer fortare och att sparkvoten påverkar tillväxten fortare får stort stöd i verkligheten.

## 2.5 Endogen tillväxt

Som vi sett tidigare gör den avtagande marginalprodukten för kapital att den långsiktiga tillväxttakten i Solow modellen är given av tillväxttakten i arbetskraft och teknologi.

Antag igen att

$$Y_t = K_t^{\alpha} (L_t E_t)^{1-\alpha}, \tag{55}$$

och lägg till antagandet att arbetskraftens effektivititet ökar med kapitalmängden. T.ex., kan man tänka sig att detta sker genom *learning by doing.* Antag specifikt att

$$E_t = k K_t, \tag{56}$$

där $k$ är en konstant proportionalitetsfaktor. För enkelhets skull bortser vi från tillväxt i arbetskraften och normaliserar $L = 1$. Vi har då

$$\begin{aligned} Y_t &= K_t^{\alpha} E_t^{1-\alpha}, \\ &= K_t^{\alpha} (k K_t)^{1-\alpha} \\ &= K_t k^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{57}$$

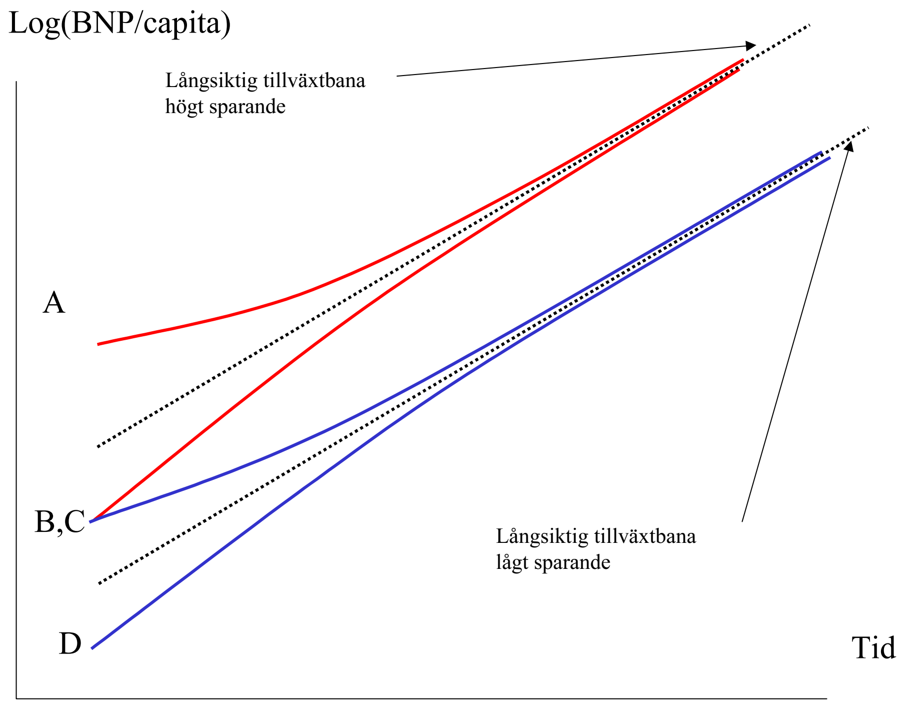



Figure 4:

Vi ser att nu har produktionsfunktionen $CRS$ i ackumulerbara produktinsfaktorer. Antag som tidigare att

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K, \tag{58}$$

$$\frac{\dot{K}_t}{K} = sk^{1-\alpha} - \delta,$$

och

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = sk^{1-\alpha} - \delta. \tag{59}$$

Modeller av denna typ kallas ofta $AK$ modeller, vilket syftar på att produktionsfunktionen är en konstant $A$ gånger $K$. I detta fall motsvaras alltså $A$ av $k^{1-\alpha}$. Som vi ser, styrs nu den *långsiktiga* tillväxttakten av $s$ och även av $k$. Saker som påverkar $s$, t.ex. skatter kan nu därför påverka den långsiktiga tillväxttakten. Man kan också tänka sig att t.ex, satsningar på utbildning/fortbildning påverkar $k$ och därmed den långsiktiga tillväxttakten.

Notera också att den långsiktiga tillväxtbanan nås direkt, till skillnad från i Solow modellen. Det betyder att det inte finns någon tendens till konvergens mellan länder med olika BNP och BNP tillväxttakt denna modell.