1 Tillväxt

1.1 Exogen tillväxt (Solow och Ramsey)

- Antag att vi för enkelhets skull att arbetsutbudet är helt oelastiskt så hushållens nyttofunktion är $E_t \sum_{s=0}^{T} \beta^s u(c_{t+s})$ där T kan vara oändligt.
- Vi antar att kapitalet deprecierar med takten δ. Ekonomins resursrestriktion är därför $c_t + k_{t+1} = f(z_t, k_t) + (1-\delta) k_t$.
- Allmän jämvikt kräver nu att

  1. Resursrestriktionen är tillgodosedd
  2. Konsumtionen väljs optimalt (Euler-villkoret)
  3. Räntan är lika med marginalavkastningen på kapital minus kapitalförslitningen.

1.2 Solow-modellen (given sparnivå)

- Låt oss börja med att studera dynamiken för en given och konstant sparkvot. Dvs en andel s av produktionen investeras. Notera nu att om $sf(z, k_t) > \delta k_t$ så växer förstås k_t eftersom investeringarna är större än kapitalförslitningen.
- För att jämföra $sf(z, k_t)$ och δk_t, låt oss rita dem.

1.3 Allmän jämvikt – endogent sparande

- Låt oss nu diskutera antagandet om konstant sparande. Vad är det som påverkar viljan att spara?

  1. *Hur inkomsterna är nu i förhållande till i framtiden.* Lägre inkomster nu i förhållande till i framtiden försvagar sparincitamenten..
  2. *Avkastningen på sparandet.* Högre ränta ger större incitament att spara.

- Båda dessa faktorer beror på nuvarande kapitalstock i förhållande till steady state. Med låg kapitalstock
  1. är inkomsterna låga relativt framtiden och
  2. marginalprodukten=räntan låg.

- De två effekterna drar åt olika håll och i vissa fall balanserar de exakt varandra.

1.4 Endogent sparande i formler

Låt oss nu formellt visa att det under vissa omständigheter är optimalt med en konstant sparkvot. Antag att $u(c_t) = \ln(c_t)$, $f\left(z_t, k_t\right) = z_t k_t^\alpha$ och $\delta = 1$. Kom ihåg Euler och kapitalmarknadsvillkoren. 1 och 2 innebär då att $\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = 1 + r_{t+1} = f_2\left(z_{t+1}, k_{t+1}\right)$. Med vår nyttospecifikation $\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta z_{t+1} \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}$.

- Låt oss gissa att optimalt konsumtion innebär att en konstant andel s av produktionen sparas: $c_t = (1-s) f(z_t, k_t) = (1-s) z_t \alpha k_t^{\alpha-1}$.
- Låt oss se om detta kan tillgodose Euler-villkoret som nu blir $(1-s) z_{t+1} k_{t+1}^\alpha / (1-s) z_t k_t^\alpha = \beta z_{t+1} \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}$.
- Dela båda sidor med $z_{t+1} k_{t+1}^\alpha$ och multiplicera sedan med k_{t+1}. Då får vi $k_{t+1}/z_t k_t^\alpha = \beta\alpha$. Använd slutligen resursrestriktion som innebär att $k_{t+1} = s z_t k_t^\alpha$, så $s = \beta\alpha$.
- Dvs, för en konstant sparkvot given av $s = \beta\alpha$, är alla villkor för allmän jämvikt uppfyllda.

1.4.1 Solow-residualen

- Vår modell kan lätt användas för att studera vad som dynamiskt händer med BNP på sikt. Vi brukar ju uttrycka tillväxt i procent per period. Notera att vi kan få det genom att logaritmera våra variabler och ta differenser eftersom $\frac{x_{t+1}-x_t}{x_t} = \frac{x_{t+1}}{x_t} - 1 \approx \ln x_{t+1} - \ln x_t$
- Låt oss nu titta på BNP-tillväxten $\gamma_{BNP} = \ln\left(z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha}\right) - \ln\left(z_t k_t^{\alpha}\right)$

$$= \ln z_{t+1} - \ln z_t + \alpha\left(\ln\left(k_{t+1}\right) - \ln\left(k_t\right)\right) \tag{1}$$

- Tillväxttakten är summan av tillväxttakten i teknikfaktorn ock kapitalandelen gånger tillväxttakten i kapitalstocken. Notera att om vi skulle haft också en variabel arbetskraft får vi $\gamma_{BNP} = \ln z_{t+1} - \ln z_t + \alpha\left(\ln k_{t+1} - \ln k_t\right) + (1-\alpha)\left(\ln n_{t+1} - \ln n_t\right)$
- Vi kan ju observera γ_{BNP}, $(\ln k_{t+1} - \ln k_t)$ och $(\ln n_{t+1} - \ln n_t)$ och kan därför räkna ut $\ln z_{t+1} - \ln z_t$ som brukar kallas *Solow-residualen.*

1.5 Konvergens

- Återigen till tillväxttakten i BNP för konstant arbetsutbud. Vi vet att $k_{t+1} = sz_t k_t^{\alpha}$, därmed får vi $\ln k_{t+1} = \ln s + \ln z_t + \alpha \ln k_t$.
- Detta är en sk AR1 process. Antag nu för ett ögonblick att z_t är konstant, givet av $\bar{z}$. Då har denna AR1process en balanspunkt k_{ss}. Vi kan lätt räkna ut denna från

$$\begin{aligned} \ln k_{ss} &= \ln s + \ln \bar{z} + \alpha \ln k_{ss} && (2) \\ \rightarrow &\quad \ln k_{ss} (1-\alpha) = \frac{\ln s + \ln \bar{z}}{1-\alpha} && (3) \end{aligned}$$

- Det är nu lätt att visa att $\ln k_{t+1} - \ln k_{ss} = \alpha (\ln k_t - \ln k_{ss})$.
- Dvs av en avvikelsen från jämvikten i en viss tidpunkt återstår en andel α nästa period.

Vi drar slutsatserna

1. Bortsett från teknisk tillväxt finns en balanspunkt, ett *steady state* vars nivå beror positivt på sparkvoten och den teknologiska nivån.
2. I steady state är tillväxten exogen.
3. Ekonomin tenderar att konvergera mot denna balanspunkt med en takt som endast beror på produktionsfunktionen, specifikt beror den negativt på kapitalandelen eftersom denna också talar om hur snabbt avtagande marginalavkastning sätter in.
4. En ökning av kapitalskatterna minskar tillväxten endast under en anpassningsfas till ett nytt steady state.

Kommentarer:

1. Balanserad tillväxt: Tillväxt i befolkningens storlek eller i dess effektivitet eller införande av ofullständig depreciering ändrar inte på våra resultat om vi istället uttrycker balanspunkten i per capita termer eller per effektivitetsenhet. I en så definierad balanspunkt växer BNP med tillväxttakten i mängden arbetskraft mätt i effektivitetsenheter.
2. Skatter kan påverka sparkvoten och därmed balanspunkten, men inte konvergenshastigheten.
3. Med ett rimligt mått på α (ungefär $1/3$) blir konvergensen för snabb.
4. Kanske kan vi tolka k_t som inkluderande också humankapital. Då blir inkomstandelen högre och konvergenshastigheten rimligare (långsammare).

1.6 Endogen tillväxt

- Som vi sett leder avtagande marginalavkastning till att tillväxten (den endogena delen, åtminstone) avtar. Inte uppenbart att marginalavkastningen måste avta. Låt oss t.ex. anta att ekonomin endogent kan ackumulera humankapital, h_t, och att produktionsfunktionen har konstant skalavkastning i de båda kapitaltyperna. Vi skulle t.ex. kunna ha $f(k_t, h_t) = k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$.

- Låt oss göra ett enkelt antagande, h_t växer i takt med k_t, dvs h_t är proportionellt mot k_t. "Learning by doing", tex. Låt a vara proportionalitetsfaktorn mellan fysiskt och humant kapital. Då får vi

$$f(k_t, h_t) = k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} = k_t^{\alpha} (a k_t)^{1-\alpha} = a^{1-\alpha} k_t \equiv A k_t \tag{4}$$

- Detta är den kända AK-modellen. Nu har vi en resursrestriktion som ges av $k_{t+1} = A k_t - c_t + (1 - \delta) k_t$.

- Notera att nu avkastningen på kapital är $A + (1 - \delta)$, oberoende av kapitalstocken. Antag också att sparandet inte påverkas via förmögenhetseffekter. Då är s konstant. (Det är lätt att visa Euler villkoret med logatimisk nytta innebär att $\frac{c_{t+1}}{\beta c_t} = \beta (A + 1 - \delta)$, så $s = \beta$).

- Tillväxttakten i konsumtionen (och produktionen) ökar permanent med sparkvot och teknikfaktorn A. Formellt

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{(1-s) A k_{t+1}}{(1-s) A k_t} = \frac{(1-s) A (s A k_t + (1-\delta) k_t)}{(1-s) A k_t} = sA + 1 - \delta. \tag{5}$$

Ekonomins tillväxttakt (i procent) ges därmed av $(sA - \delta)$.

- Om vi inför kapitalskatter som minskar sparandet får det permanenta effekter på tillväxten.

Några slutsatser

1. Det finns inte längre någon balanspunkt som ekonomin strävar mot. En ökning av kapitalinkomstskatten påverkar tillväxten permanent.

2. Om vi tolkar Ak_t som en aggregerad produktionsfunktion är det inte säkert att hela värdet av marginalprodukten A tillfaller den enskilda individen, det kan finnas *spill-overs* som skapar den konstanta skalavkastning i k. I så fall blir sparincitamenten, sparandet och tillväxttakten lägre och vi får ett marknadsmisslyckande.

2 En real konjunkturcykelmodell

- Låt oss nu analysera stokastiska fluktuationer i z_t. Liksom tidigare är resursrestriktionen $c_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t = f(z_t, k_t) = z_t k_t^\alpha$
- Rita $sf(z_t, k_t)$ och δk_t för två värden på z. Propageringsmekanism!

2.1 Propageringsmekanism formellt

- Vi har redan visat att optimalt sparande under logaritmisk nytta är oberoende av avkastningen. Nu är ju avkastningen stokastisk men det spelar ingen roll. Antag konstant sparande s. Förenkla och antag $\delta = 1$. Då får vi

$$k_{t+1} = s z_t k_t^{\alpha}$$

- Logaritmera detta

$$\ln k_{t+1} = \ln s + \ln z_t + \alpha \ln k_t$$

- Genom att substituera bakåt är det lätt att visa att

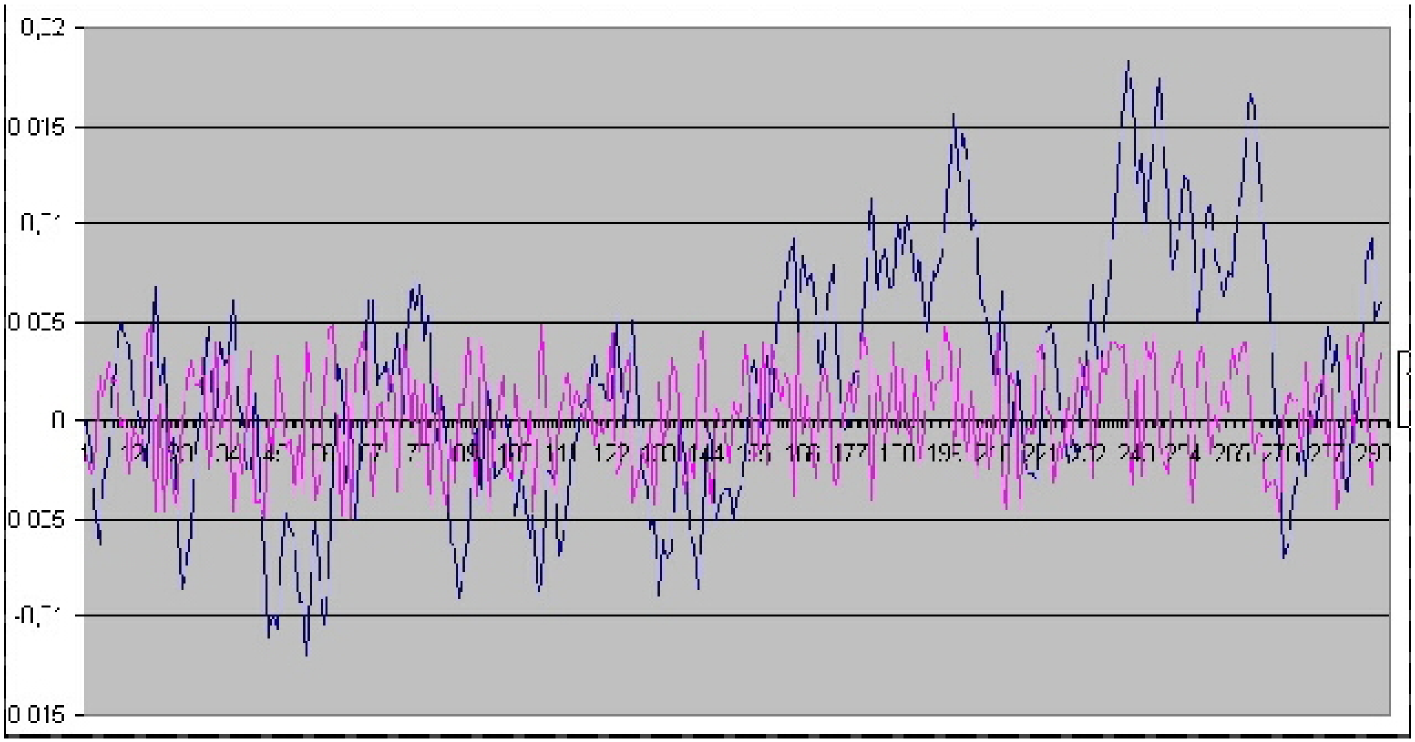
$$\ln k_{t+1} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s \ln s + \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s \ln z_{t-s} = \frac{\ln s}{1-\alpha} + \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s \ln z_{t-s} \quad (6)$$

Slutsatser

- 1. *Alla* tidigare chocker påverkar utvecklingen.

  2. Detta är ett exempel på en RBC modell med en propageringsmekanism.

  3. Ju högre är α,desto längre påverkar en chock utvecklingen av k och därmed BNP.



4. I figuren ser vi dels chockerna $\ln(z_t)$och dels avvikelsen mellan $\ln k_t$ och steady state (i frånvaro av chocker). Som vi ser är fluktuationerna mycket mer lågfrekventa i kapitalstocken (och därmed BNP) – konjunkturcykler uppstår trots att chockerna inte har några cykler.