Ekvationer i vår enkla Dynamiska Allmänna JämviktsModell (DAJM)

Vi specificerar nyttan i en given period som

$$u(c_t, n_t) = \frac{c_t^\sigma}{\sigma} + \nu \frac{(1-n_t)^\varepsilon}{\varepsilon}$$

$\sigma \leq 1$ och $\varepsilon \leq 1$ parametriserar hur konkav nyttofunktionen är och ν den relativa preferensen för fritid. Man kan matematiskt visa att fallet $\sigma = \varepsilon = 0$ motsvara logaritmisk nytta, dvs

$$u(c_t, n_t) = \ln c_t + \nu \ln (1 - n_t)$$

I en given period väljer hushållet på marginalen mellan att konsumera varor och fritid så nyttan maximeras. Första ordningens för nyttomaximum villkor säger att lönen gånger marginalnyttan för konsumtion plus nyttoförlusten på marginalen av en minskad enhet fritid ska vara 0;

$$\begin{aligned} w_t u_{c_t} + u_{n_t} &= 0 \\ &\Rightarrow \quad w_t = \frac{\nu(1-n_t)^{\varepsilon-1}}{c_t^{\sigma-1}} \end{aligned}$$

När detta är uppfyllt är på marginalen värdet av den ökade konsumtionen som lite mer arbete ger lika med nyttoförlusten av den minskade fritiden. Vid log nytta får vi det intressanta specialfallet

$$w_t = \frac{\nu(1-n_t)^{-1}}{c_t^{-1}} = \nu \frac{c_t}{1-n_t},$$

dvs att kvoten mellan konsumtionen av varor och fritid är proportionell mot lönen.

Perfekt arbetsmarknad och företagsmaximering ger oss att lönen är lika med värdet av marginalprodukten för arbetskraft. Vi specificerar en *CobbDouglas* produktionsfunktion så inga vinster kommer att uppstå. Tills vidare bryr vi oss inte om teknologisk tillväxt och får då

$$F(z_t, k_t, n_t) = k_t^\theta n_t^{1-\theta}.$$

Lönen w_t ska vara lika med arbetskraftens marginalprodukt

$$\begin{aligned} w_t &= F_3(z_t, k_t, n_t) \\ &= (1-\theta) k_t^\theta n_t^{-\theta} \\ &= (1-\theta) \left(\frac{k_t}{n_t}\right)^\theta . \end{aligned}$$

Hyreskostnaden för kapital blir lika med kapitalets marginalkostnad

$$\begin{aligned} p_{kt} &= F_2\left(z_t, k_t, n_t\right) \\ &= \theta k_t^{\theta-1} n_t^{1-\theta} \\ &= \theta \left(\frac{k_t}{n_t}\right)^{\theta-1}. \end{aligned}$$

Nu har vi specificerat våra nytto och produktionsfunktioner och kan därmed nu sätta upp en allmän jämvikt i en eller flera perioder.

1 Modell för en-period

Nyttomaximering leder till att

$$w - \frac{\nu(1-n)^{\varepsilon-1}}{c^{\sigma-1}} = 0$$

Det blir ekvation 1.

Antag nu att vi inför skatter på arbete. En arbetstimme mer ger nu ökade konsumtionsmöjligheter till ett belopp $w_t(1-\tau_t)$ och därmed blir optimeringsvilkoret för arbetskraftsbesluten

$$w\left(1-\tau\right) - \frac{\nu\left(1-n\right)^{\varepsilon-1}}{c^{\sigma-1}} = 0. \tag{1}$$

Lönen bestäms av arbetets marginalprodukt:

$$w - \left(1-\theta\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{\theta} = 0, \tag{2}$$

vilket ger ekvation 2.

Slutligen har vi resurstillgången som är ekvation 3

$$c - k^{\theta} n^{1-\theta} - \left(1-\delta\right) k - g = 0. \tag{3}$$

Detta räcker för att lösa modellen, men vi kan också vara intresserade av leasingpriset på kapital. Då använder vi

$$\begin{aligned} p_k - F_2\left(z, k, n\right) &= 0 \\ p_k - \theta\left(\frac{k}{n}\right)^{\theta-1} &= 0. \end{aligned}$$

Låt oss också sätta upp hushållens och regeringens budgetvillkor. De är

$$\begin{aligned} c &= w\left(1-\tau\right) n + p_k k + \left(1-\delta\right) k + T \\ g + T &= w\tau n \end{aligned}$$

Notera att om vi summerar dessa får vi

$$\begin{aligned} c + g + T &= w\left(1-\tau\right) n + p_k k + \left(1-\delta\right) k + T + \tau w n \\ c + g &= wn + p_k k + \left(1-\delta\right) k. \end{aligned}$$

Vi vet att $wn + p_k k = k^{\theta} n^{1-\theta}$, dvs vi får tillbaka resursutgångsekvationen.

2 Modell för två perioder

Optimalt val mellan arbete och kapital ger oss ekvation 1 och 2 i vår DAJM

$$w_t(1-\tau_t) - \frac{\nu(1-n_t)^{\varepsilon-1}}{c_t^{\sigma-1}} = 0,$$

för $t = 1, 2$.

Ekvation 3 i DAJM är det *intertemporala* konsumtionsbeslutet. Vi inkluderar en skatt på avkastningen på sparandet, τ_r. Bruttoavkastningen på sparandet blir därmed $(1 + r_2(1-\tau_r))$. MRS mellan perioderna är $\frac{u_{c_1}}{\beta u_{c_2}}$ och optimering kräver därmed

$$\begin{aligned}
\frac{u_{c_1}}{\beta u_{c_2}} - (1 + r_2(1-\tau_r)) &= 0 \\
\frac{c_1^{\sigma-1}}{\beta c_2^{\sigma-1}} - (1 + r_2) &= 0
\end{aligned}$$

I specialfallet $\sigma = 0$, får vi

$$\frac{c_2}{\beta c_1} - (1 + r_2) = 0$$

Perfekt arbetsmarknad och företagsmaximering ger oss att lönen är lika med värdet av marginalprodukten för arbetskraft.

$$w_t = (1-\theta)\, k_t^{\theta} n_t^{-\theta} = (1-\theta)\left(\frac{k_t}{n_t}\right)^{\theta}$$

vilket blir ekvation 4 och 5.

För investerings beslutet gäller att om en enhet av (konsumtionsvaran) investeras blir kapitalstocken 1 enhet högre och produktionen därmed $F_k(k_2, n_2)$ enheter högre. Dessutom finns $1-\delta$ enheter mer kapital kvar i slutet av nästa period som kan konsumeras. Nuvärdet av detta är $\frac{F_k(k_2,n_2)+1-\delta}{1+r_2}$ och detta ska sättas lika med kostnaden av att investera en enhet av konsumtionsvaran som är lika med 1, dvs

$$1 = \frac{F_k(k_1(1-\delta) + i_1, n_2) + 1 - \delta}{1 + r_2},$$

vilket ger ekvation 6. Alternativt kan vi argumentera att avkastningen på att spara r_2, måste vara lika med avkastningen på att investera, dvs

$$r_2 = F_k(k_1(1-\delta) + i_1, n_2) - \delta$$

vilket ju bara är en omskriven variant av föregående ekvation

Kvarvarande ekvationer blir våra resursrestriktioner, dvs

$$\begin{aligned}
c_1 + i_1 + g_1 &= k_1^{\theta} n_1^{1-\theta} \\
c_2 + i_2 + g_2 &= k_2^{\theta} n_2^{1-\theta}
\end{aligned}$$

Vi kan skriva om dessa genom att notera att

$$\begin{aligned} i_1 &= k_2 - (1-\delta)\, k_1 \\ i_2 &= -(1-\delta)\, k_2. \end{aligned}$$

Den senare ekvationen kommer av att antar att allt kapital som finns kvar i slutet av period 2 äts upp, dvs desinvesteras. Vi har nu ekvation 7 och 8.

$$\begin{aligned} c_1 + k_2 - (1-\delta)\, k_1 + g_1 &= k_1^{\theta} n_1^{1-\theta} \\ c_2 - (1-\delta)\, k_2 + g_2 &= k_2^{\theta} n_2^{1-\theta} \end{aligned}$$

3 Excel-modellen

I excel modellen finns de ekvationer som ska lösas i kolumn B, med beskrivning i kolumn A. Ekvationerna är skrivna så att det i högerledet ska bli 0 om de är uppfyllda och vänsterledet står i respektive cell. Värdet i cellen är avvikelsen från 0. I kolumn D finns först de endogena variablerna, med beskrivningar i kolumn C. Antalet endogena variabler är förstås lika många som antalet ekvationer. Om man manuellt skriver in värden i cellerna med endogena variabler utgör dessa startvärden för den numeriska lösningsproceduren.

Nedanför de endogena variablerna finns några intressanta nyckeltal, och man kan gärna lägga till egna sådana där.

I kolumn G finns parametrar och exogena variabler, alltså sådana variabler som bestäms utanför modellen, t.ex. k_2 i enperiodsmodellen.

Modellen löses genom att man använder Solve-funktionen under Tools (Verktyg). Denna hittar en lösning till ekvationerna, dvs sådan att de relevanta cellerna i B-kolumnen blir noll, genom att variera de endogena variablerna i D-kolumnen.